Carl Friedrich Gauß und die Entwicklung der physikalischen Geodäsie

Moritz, Helmut

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 27, 1977, S.323-331

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Carl Friedrich Gauß und die Entwicklung der physikalischen Geodäsie

Von **Helmut Moritz**

Die Größe Euklids liegt darin, daß es nicht nur eine Euklidische, sondern auch eine Nichteuklidische Geometrie gibt. Dieser Satz ist gewiß etwas überspitzt formuliert, aber vielleicht kann man ihn benützen, um die Bedeutung von Gauß für die Geodäsie zu veranschaulichen.

Der Vergleich liegt schon deshalb nahe, weil man dem Namen Gauß' in der Geodäsie ebenso häufig begegnet wie dem Euklids in der Geometrie, selbst in Formulierungen, wie etwa „Das Schwereanomalienfeld kann als stochastischer Prozeß nicht zugleich Gaußsche Verteilung und Ergodizität besitzen", die der Gedankenwelt Gauß' wohl fast so fern liegen wie der Satz „Die Gravitationswirkung von Massen bewirkt eine Abweichung der Raum-Zeit-Metrik von der Euklidischen Struktur" der Gedankenwelt Euklids.

Klar ist, daß Gauß die Geodäsie seiner Zeit souverän beherrscht und die weitere Entwicklung geprägt hat wie kein anderer zuvor oder nachher, ebenso wie dies bei Euklid in der Geometrie der Fall war. Während allerdings Euklid wohl mehr der geniale Systematiker und Didaktiker war, war Gauß der große schöpferische Forscher.

Zwei Jahrtausende lang hat man in Euklid den Schöpfer des vollendeten und abgeschlossenen Lehrgebäudes der Geometrie gesehen. Es brauchte lange, bis man bei ihm Gedanken und Formulierungen fand, die zu Bedenken, zum Widerspruch und damit zur Weiterentwicklung anregten; es war dies besonders das Parallelenaxiom. Und heute sieht man den letzteren Umstand als geistesgeschichtlich wohl noch bedeutsamer an.

Vielleicht liegt es mit der Rolle Gauß' in der Geodäsie (und nur darüber bin ich befugt zu sprechen) nicht ganz unähnlich — bei aller Verschiedenheit, die einem Vergleich naturgemäß anhaftet. In manchen Gebieten der Geodäsie trifft man den Namen Gauß' in Lehrsätzen und dgl. so häufig, daß man auf den ersten Eindruck hin verallgemeinern könnte, Gauß habe ohnehin schon im wesentlichen die ganze theoretische Geodäsie geschaffen.

Dann wäre es, bei aller Ehrfurcht vor der Gaußschen Leistung, allerdings böse um unser Fach bestellt. Denn das würde heißen, daß die Geodäsie eine fertige, abgeschlossene und damit tote Wissenschaft wäre, eine Disziplin, die den Namen Wissenschaft zu Unrecht trüge. Und das würde letztlich bedeuten, daß die Geodäsie gar nicht wert war, daß sich ein Geist wie Gauß damit so eingehend und liebevoll beschäftigt hat.

Nun, die Geodäsie hat sich weiter entwickelt, sie ist weit über Gauß hinausgewachsen. Wie bei Euklid hat die weitere Entwicklung an Gauß' Vorstellungen und Formulierungen angeknüpft, zustimmend, verallgemeinernd, ablehnend. Aber es ist doch anders als bei Euklid: selbst wenn die Entwicklung sich in Gegensatz zu Gauß gestellt hat, haben vielfach Gauß' Ideen, in oft ganz unerwarteter Weise, zu diesem Fortschritt beigetragen, ja das Werkzeug hierzu geliefert.

Über die geodätischen Arbeiten Gauß' gibt es die schöne zusammenfassende Abhandlung von A. Galle, die im zweiten Teil des elften Bandes der Werke von Carl Friedrich Gauß abgedruckt ist. Um zu sehen, wie viel geodätisch bedeutsame Lehrsätze und Methoden Gauß geschaffen hat, braucht man nur geodätische Lehrbücher aufzuschlagen. Hier aber soll versucht werden, an Hand von Beispielen und ohne Anspruch auf Vollständigkeit der Dialektik Gaußscher Gedanken dort nachzuspüren, wo sie die Entwicklung der physikalischen Geodäsie in oft überraschender Weise indirekt beeinflußt haben und immer wieder aufs neue befruchten.

Definition und Bestimmung der Erdgestalt

In der Arbeit „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona“ aus dem Jahr 1828, die im IX. Band seiner Werke abgedruckt ist, schreibt Gauß: „Was wir im geometrischen Sinn Oberfläche der Erde nennen, ist nichts anderes als diejenige Fläche, welche überall die Richtung der Schwere senkrecht schneidet, und von der die Oberfläche des Weltmeers einen Teil ausmacht.“ Dies ist die berühmte Definition der „geometrischen Erdoberfläche“ oder „mathematischen Erdgestalt“; diese Fläche führt heute den von J. B. Listing 1872 eingeführten Namen *Geoid.*

Dieser Begriff ist uns heute so selbstverständlich geworden, daß es schwer ist, die Neuartigkeit des Gaußschen Gedankens zu begreifen. Bisher aber war die Frage nach dem Wesen der Erdfigur immer in Form einer geometrisch einfachen Fläche beantwortet worden, wenn auch im Laufe der Geschichte die Antworten verschieden lauteten: im Anfang war es die Ebene, bei den Griechen die Kugel, seit Newton das Rotationsellipsoid. Immer aber lautete die Frage: Auf welcher (geometrisch definierten) Fläche steht die Lotrichtung senkrecht? Schließlich aber mußte man erkennen, daß es eine solche geometrisch definierte Fläche gar nicht gibt, jedenfalls nicht eine Fläche von einfachem geometrischem Bildungsgesetz. Trotzdem hielt man am Ellipsoid fest und dachte eher daran, die Beobachtungen durch irgendwelche Korrektionen dem ellipsoidischen Modell „anzupassen“, durch Korrektionen, die ad hoc eingeführt werden und gedanklich alles andere als einfach sind.

Erinnert das nicht ein wenig an die komplizierten Epizyklen eines Ptolemäus, denen Kopernikus durch die geniale „Umkehrung der Perspektive“, die seinem heliozentrischen System zugrundeliegt, ein Ende machte? Eine vielleicht nicht ganz unähnliche Umkehrung der Perspektive (Gauß selbst spricht von einem Wechsel des Standpunktes) liegt auch der Gaußschen Definition der Erdfigur zugrunde: statt zu fragen, ob die Lotrichtungen auf einer Kugel, einem Ellipsoid oder etwa auf einer anderen geometrisch vorgegebenen Fläche senkrecht stehen, wird die „mathematische Erdgestalt" geradezu als jene Fläche *definiert*, die überall auf der Lotrichtung senkrecht steht, ohne über das geometrische Bildungsgesetz irgend etwas vorauszusetzen.

Physikalisch handelt es sich beim Geoid um eine Niveaufläche, die in Meeresniveau verläuft, und diese Definition hat sich als äußerst zweckmäßig und fruchtbar erwiesen. Heinrich Bruns („Die Figur der Erde", 1878) hat die Gaußsche Definition auf die Schar aller Niveauflächen verallgemeinert, weil man ja auf der tatsächlichen (physischen) Erdoberfläche mit ihren Bergen und Tälern mißt und die vertikale Achse des Theodoliten nicht auf dem Geoid, sondern auf der Niveaufläche senkrecht steht, die durch den Beobachtungspunkt geht.

Es ist klar, daß es die Geodäsie unmittelbar nicht mit dem Geoid zu tun hat, sondern die physische Erdoberfläche vermessen und in Karten darstellen muß; das besagt auch die bekannte Formulierung Friedrich Robert Helmerts (1882), daß die Aufgabe der Geodäsie „die Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche" sei. Wegen der Unregelmäßigkeit der physischen Erdoberfläche stellt aber das Geoid eine fast unentbehrliche Hilfs- und Bezugsfläche (z. B. für die Höhen „über Meeresniveau") dar, obwohl es auf den Kontinenten unterhalb der Erdoberfläche verläuft und damit strenggenommen der Messung gar nicht zugänglich ist.

Dieser Umstand ist nicht ohne begriffliche Schwierigkeiten, die man aber lange als unvermeidlich ansah. Erst M. S. Molodenski gelang es im Jahr 1945, einen sehr bemerkenswerten Ausweg zu finden; er zeigte nämlich, daß es möglich ist, mit Hilfe von Schweremessungen auf der ganzen Erde, also auf gravimetrischem Weg, die physische Erdoberfläche zu bestimmen, und zwar direkt, ohne Verwendung des Geoids.

Mathematisch gesehen handelt es sich dabei um ein äußerst schwieriges nichtlineares freies Randwertproblem. Trotzdem ist es einfach, das Grundprinzip zu verstehen. Bedeutet W das Schwerepotential auf der physischen Erdoberfläche S und g den Schwerevektor von S, so besteht eine funktionelle Beziehung

$$g = f\,(S, W),$$

das heißt, bei gegebener Fläche S und bekannter Funktion W auf S kann man den Schwerevektor g berechnen (die Lösung eines äußeren Randwertproblem von Dirichlet ergibt W im Außenraum von S und g erhält man dann als Gradienten der räumlichen Funktion W). Gelingt es, diese Gleichung nach S aufzulösen, so hat man

$$S = F\,(W, g).$$

Das heißt, kennt man auf der ganzen Erdoberfläche den Schwerevektor g (aus einer Kombination von Schweremessungen mit astronomischen Beobachtungen von Länge und Breite) und das Schwerepotential W (durch Nivellement in Verbindung mit Schweremessung), so erhält man die Gestalt der physischen Erdoberfläche S.

Abgesehen von der schwierigen praktischen Aufgabe, g und W in gleichmäßiger Verteilung über die *ganze* Erdoberfläche zu erhalten, besteht das theoretische Problem darin, daß das Symbol f in der ersten Gleichung nicht eine gewöhnliche Funktion, sondern einen lichtlinearen Operator bedeutet. Damit stellt die Auflösung dieser Gleichung nach S ein sehr schwieriges Problem der nichtlinearen Funktionalanalysis dar. In mathematisch völlig befriedigender Form ist deshalb eine Behandlung erst vor zwei Jahren durch L. Hörmander gelungen, der unter einschränkenden Voraussetzungen Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bewies.

Praktisch ausreichende Näherungsverfahren wurden aber bereits von Molodenski und später von anderen Autoren angegeben. Es ist bemerkenswert, daß sich die meisten dieser Verfahren letzten Endes auf die Verwendung des Gaußschen Integralsatzes der Potentialtheorie zurückführen lassen. Wenn sich auch dieser nach ihm benannte Integralsatz bei Gauß explizit gar nicht findet (vgl. Cl. Schaefer, „Über Gauß' physikalische Arbeiten", S. 97, Gauß' Werke, Band XI 2), so ist er doch mit den Gedanken seiner Arbeiten über Potentialtheorie untrennbar verbunden. So kann man vielleicht nicht ohne Berechtigung sagen, daß ein physikalischer Gedanke Gauß' die Möglichkeit geboten hat, über seine geodätische Definition der Erdfigur hinauszuwachsen.

Die Theorie von Molodenski hat große Beachtung gefunden und unerhörte Wirkung auf die moderne Entwicklung der theoretischen Geodäsie ausgeübt. Trotzdem hat sie das Geoid nicht verdrängt: dieser Begriff ist einfach von zu grundlegender gedanklicher Bedeutung, als daß man ihn vernünftigerweise aufgeben könnte — ein Beweis für die Lebenskraft der Gaußschen Definition.

Ja, noch nie wurden so viele Geoidberechnungen durchgeführt wie gerade heute. Der Grund liegt darin, daß man in der Beobachtung der Bahnstörungen künstlicher Satelliten ein außerordentlich leistungsfähiges Mittel zur Bestimmung des globalen Erdschwerefeldes und der Großformen des Geoids besitzt. Muß man erwähnen, daß Gauß' grundlegende Arbeiten zur Störungstheorie und zur Bahnbestimmung von Planeten auch für die Theorie der Satellitenbahnen von Bedeutung waren?

Geometrie des Erdschwerefeldes

Es gibt nur wenige mathematische Gedanken, die in der Folgezeit eine so große, weit über die Mathematik hinausgehende Bedeutung gewonnen haben wie Gauß' innere Geometrie gekrümmter Flächen. Von Riemann wurde sie von zwei auf beliebig viele Dimensionen verallgemeinert und von Ricci durch eine leistungsfähige Symbolik (absoluter Differentialkalkül, Tensoranalysis) bereichert. Damit aber ist diese innere Geometrie die mathematische Grundlage von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie geworden und hat dadurch nicht nur die Physik, sondern auch unsere philosophischen Vorstellungen von Raum und Zeit revolutioniert.

Dieser Gaußsche Gedanke einer inneren Flächentheorie geht nun unmittelbar auf seine Beschäftigung mit der Geodäsie zurück, auf das Ausmessen und Abbilden der Erdoberfläche. Nach A. Galle sollten die allgemeinen Untersuchungen über gekrümmte Flächen die Grundlage seines projektierten Werkes über höhere Geodäsie bilden. Die in der Flächentheorie, in der Riemannschen Geometrie und in der Allgemeinen Relativitätstheorie so grundlegend wichtigen „geodätischen Linien" erinnern noch daran.

Für Gauß war es wie für seine Vorgänger und Nachfahren völlig naheliegend, sich auf die Erdoberfläche als zweidimensionales Gebilde zu beschränken. Alle geodätischen Messungen wurden auf dieser Fläche durchgeführt, ja der Mensch hatte überhaupt nicht die Möglichkeit, diese Fläche zu verlassen. Fast war er ein zweidimensionales Wesen, wie die Einwohner von Abbott's „Flatland" ...

Abgesehen von wenigen Ausnahmen, wie die schon genannte Schrift von Bruns, „Die Figur der Erde", war also die Geodäsie bis vor wenigen Jahrzehnten weitgehend von zweidimensionalen Modellen, dem Ellipsoid und dem Geoid, beherrscht. Räumliche Begriffe und räumliche Messungen wurden möglichst schnell auf eine dieser Flächen reduziert.

Eine Wende in dieser Denkweise begann erst nach Ende des Zweiten Weltkrieges. Molodenski entwickelte seine Theorie in bewußter Abkehr vom Begriff des Geoids, und Antonio Marussi entwickelte eine *räumliche* „innere Differentialgeometrie des Erdschwerefeldes, gefolgt von Martin Hotine. Man sprach, sich bewußt von der traditionellen Denkart abhebend, von „dreidimensionaler Geodäsie". Der erste Satz von Hotines Buch" „Mathematical Geodesy" (1969) lautet „This book is an attempt to free geodesy from its centuries-long bondage in two dimensions". Mit der Satellitengeodäsie war dann das Raumzeitalter auch in unserer Wissenschaft endgültig angebrochen.

Es besteht kein Zweifel, daß die zweidimensionale Arbeitsweise in der Geodäsie ihre volle praktische Berechtigung hatte. Trotzdem fragt man sich, warum das zweidimensionale Modell auch die Theorie so vollkommen und unbestritten beherrschte. Zweifellos hatte das zu einer gewissen Erstarrung geführt, die einer lebendigen Weiterentwicklung hinderlich war.

Wenn ich mir eine persönliche Vermutung erlauben darf, war vielleicht die große Vollendung, die Gauß der Geodäsie als Flächentheorie gegeben hat, daran nicht ganz unbeteiligt. Denken wir nur an die Geometrie der Ellipsoidoberfläche, an die konforme Abbildung von Flächen in die Ebene oder auch an die Definition der Erdfigur als Niveaufläche. Ein großes Gedankengebäude, von der Autorität eines mächtigen Namens getragen.

Fragen wir uns aber nun, wie diese Denkweise überwunden werden konnte. Marussis „geodesia intrinseca" erinnert bewußt an Gauß' Flächentheorie, die „geometria intrinseca", aber sie ist nun Differentialgeometrie in drei Dimensionen. Marussis und Hotines mathematisches Werkzeug ist die Tensoranalysis, die Analysis der Riemannschen Geometrie, der „inneren Geometrie" ganz im Sinne von Gauß, nur verallgemeinert auf mehr als zwei Dimensionen. Gauß durch Gauß überwunden: gibt es einen schöneren Beweis für die Größe und Lebendigkeit von Gedanken?

Aber die Entwicklung geht weiter: schon versucht man, noch allgemeinere Geometrien als die Riemannsche auf die Geodäsie anzuwenden. Ein Bezug führt aber auch von der Allgemeinen Relativitätstheorie zur Geodäsie, ein Bezug, der in Zukunft große praktische Bedeutung gewinnen dürfte. Ich meine die Gradiometrie, die Messung zweiter Ableitungen des Gravitationspotentials.

Schweremessungen sind in der Geodäsie nur dann sinnvoll anzuwenden, wenn sie die Erde dicht und gleichförmig bedecken. Große Lücken bestehen noch heute über den Ozeanen. Die Seegravimetrie wird diese Aufgabe nicht lösen können; es gibt zu wenig Schiffe und sie sind zu langsam. Ideal wäre ein Flugzeug als Träger des Meßinstruments. Die Versuche mit Fluggravimetrie haben aber nicht voll befriedigt: das Gravimeter ist nicht in der Lage, Gravitationskräfte und Trägheits„kräfte", wie sie durch unregelmäßige Beschleunigungen des Flugzeugs als Bezugssystem entstehen, zu trennen. Das ist die durch Einstein berühmt gewordene Äquivalenz von Gravitation und Trägheit.

Bei den ersten Ableitungen des Potentials, die den Schwerevektor bilden, ist eine solche Trennung von Gravitation und Trägheit tatsächlich nicht möglich, wohl aber in den zweiten (und höheren) Ableitungen. Der Widerspruch zur Relativitätstheorie ist nur scheinbar. In der Tat können die zweiten Ableitungen als Elemente des Riemannschen Krümmungstensors der vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt angesehen werden. Der Krümmungstensor aber trennt Gravitation und Trägheit: nur die erstere ergibt einen von Null verschiedenen Beitrag, so daß der Krümmungstensor im wesentlichen als reine Gravitationsgröße angesehen werden kann; das gilt daher auch für die zweiten Ableitungen.

Die praktische geodätische Bedeutung dieser zweiten Ableitungen, auch Schweregradienten oder kurz Gradienten genannt (es handelt sich in der Tat um Gradienten des Schwerevektors), liegt also darin, daß sie auch im Flugzeug theoretisch exakt gemessen werden können. Gradiometer können aber nicht nur in ein Flugzeug, sondern auch in einen künstlichen Satelliten eingebaut werden. Es handelt sich um in Entwicklung befindliche Verfahren, die hoffentlich unsere Kenntnis des Erdschwerefeldes bedeutend verbessern werden.

Theoretisch interessant ist auch, daß die Gradiometrie direkt als Meßverfahren der Allgemeinen Relativitätstheorie angesehen werden kann: in seinem Buch über diese Theorie spricht J. L. Synge von „relativistically valid geodetic survey". Was aber Gauß betrifft: der Riemannsche Krümmungstensor ist die direkte mehrdimensionale Verallgemeinerung des Gaußschen Krümmungsmaßes, und der analytische Ausdruck für diesen Tensor entspricht dem Theorem, dessen Bedeutung Gauß klar erkannte, denn er nannte es „egregium".

Datenkombination in der Erdmessung

Bis vor nicht allzulanger Zeit bestand die Erd„messung" vorwiegend aus der Theorie des Erdschwerefeldes; einschlägige Messungen gab es nur verhältnismäßig wenige. In den letzten beiden Jahrzehnten hat sich diese Lage grundlegend geändert; die Erdmessung hat das Stadium akademischer Theorie verlassen und ist praktische Wirklichkeit geworden.

Diese Entwicklung verdanken wir im wesentlichen der Raumfahrt, die von der Erdmessung die Lösung praktischer Aufgaben erwartet, aber auch in der Satellitengeodäsie äußerst leistungsfähige Meßverfahren bereitstellt. Es liegen damit heute sehr viele Meßergebnisse ganz verschiedener Art vor, terrestrische Messungen und Satellitendaten, die es in bestmöglicher Weise auszunützen und zu vereinigen gilt, um daraus einheitliche und optimale Werte für Erdgestalt und Erdschwerefeld zu bekommen.

Das klassische Verfahren für eine solche Datenkombination ist die von Gauß begründete Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Der Grundgedanke ist allgemein bekannt. Es sei das lineare Gleichungssystem

$$AX = l$$

bei gegebener Matrix A, und gemessenem Vektor l nach einem Vektor X, aufzulösen, der die Parameter des Problems umfaßt. Hat man ebenso viele Messungen l wie Parameter X und ist die dann quadratische Matrix regulär, so kann man das Gleichungssystem eindeutig nach den Unbekannten X auflösen. Hat man aber *mehr* Messungen als Unbekannte, so erhält man ein überbestimmtes Gleichungssystem, das im allgemeinen gar keine Lösung besitzt.

Gauß' Gedanke besteht nun darin, dieses unlösbare Gleichungssystem zu ersetzen durch

$$AX = l + v,$$

das heißt, die Beobachtungen l durch „Verbesserungen" v so abzuändern, daß das System lösbar wird und v möglichst klein ist. Als Forderung für die Kleinheit von v nimmt Gauß (und fast gleichzeitig, unabhängig von ihm, Legendre):

$$v^T P v = \text{Minimum},$$

wobei P eine vorgegebene positiv-definite Matrix, die Gewichtsmatrix, darstellt (ein hochgestelltes T bedeutet Transposition einer Matrix oder eines Vektors).

Diese Methode setzt also voraus, daß es weniger Unbekannte als Beobachtungen gibt. Das angegebene Minimumsprinzip ist mathematisch außerordentlich zweckmäßig und besitzt eine einfache geometrische Deutung: Der Raum der Parameter X wird als Unterraum des Raumes der Beobachtungen l aufgefaßt, und die Lösung des Problems erfolgt durch rechtwinklige Projektion des „Beobachtungspunktes" l auf den Parameterraum; die räumliche Metrik ist durch die positiv-definite quadratische Form $x^T P x$ definiert. Nicht zuletzt aber besitzt die Methode eine solide statistische Grundlage. Sie ist in der Geodäsie, der Astronomie und überhaupt in allen messenden Wissenschaften zum unentbehrlichen Werkzeug geworden.

Leider läßt sich die Gaußsche Ausgleichungsrechnung bei der Bestimmung der Erdfigur und des Erdschwerefeldes vielfach nicht unmittelbar anwenden. Der Grund liegt in der Unregelmäßigkeit des Erdschwerefeldes. Eine mathematisch exakte und auch praktisch allgemein befriedigende Darstellung des Erdschwerefeldes durch ein Modell, das nur endlich viele Parameter enthält, ist nicht möglich (zum Beispiel braucht man für die vollständige Darstellung des äußeren Erdschwerefeldes unendlich viele Kugelfunktionskoeffizienten). Daher stehen im Hauptproblem der Erdmessung grundsätzlich unendlich vielen Unbekannten nur eine endliche Anzahl von Messungen, so groß sie auch sein mag, gegenüber. Damit ist die Voraussetzung für das Gaußsche Verfahren, mehr Messungen als Unbekannte, prinzipiell nicht erfüllt.

Nun, vielleicht kann man durch Anwendung eines Gaußschen Gedankens hier einen Ausweg finden. Gauß hat die Meßfehler v eben wegen ihrer Unregelmäßigkeit statistisch behandeln können; könnte man nicht auch, aus der Not eine Tugend machend, gerade die Unregelmäßigkeit des Erdschwerefeldes zur Grundlage einer statistischen Behandlung machen?

Dieser Gedanke hat sich in der Tat als zweckmäßig und fruchtbar erwiesen. Man kann den unregelmäßigen Anteil des Erdschwerefeldes als stochastischen Prozeß auffassen und damit die Theorie der Prädiktion stochastischer Prozesse auf die Interpolation und Extrapolation der Schwereanomalien anwenden. Den Höhepunkt dieser, im wesentlichen in den letzten zwanzig Jahren erfolgten, Entwicklung stellt die von T. Krarup 1968 begründete Kollokation nach der Methode der kleinsten Quadrate (least-squares collocation) dar.

Wiederum läßt sich der Grundgedanke leicht darstellen. Durch scheinbar geringe Verallgemeinerung der obigen Beobachtungsgleichung erhält man

$$l = AX + s + n,$$

wobei $n = -v$ ist und die Größe s das Neue gegenüber dem obigen Modell darstellt. Dieses s stellt den Einfluß des unregelmäßigen Erdschwerefeldes auf die Beobachtung l dar; es wird als stochastische Veränderliche aufgefaßt.

Damit wird vom Erdschwerefeld ein systematischer Anteil, der durch endlich viele Parameter X bestimmt ist, abgespalten; der Rest bildet den Vektor s. Der Vektor n umfaßt wieder die unregelmäßigen Meßfehler.

Die für die praktische Anwendbarkeit dieses Modelles entscheidende Tatsache besteht darin, daß ohne Ausnahme alle geodätischen Beobachtungen in dieser Form ausgedrückt werden können. Ist zum Beispiel l eine Beobachtung der Schwere g, so bedeutet AX die normale Schwere γ, s ist die Schwereanomalie Δg und n bezeichnet den unregelmäßigen Meßfehler.

Als Minimumsprinzip hat man nun, in natürlicher Verallgemeinerung des Gaußschen Prinzips,

$$n^T P n + s^T R s = \text{Minimum},$$

wobei R das statistische Verhalten des unregelmäßigen Erdschwerefeldes beschreibt.

Die Lösung ergibt Matrizenformeln, die fast so einfach aussehen wie die Formeln der klassischen Ausgleichungsrechnung. Die unendlich vielen Freiheitsgrade des unregelmäßigen Erdschwerefeldes treten nach außen gar nicht in Erscheinung; sie bestimmen aber die Struktur des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses und beeinflussen die Gestalt von Matrizen wie etwa R.

Stochastische Prozesse sind erst lange nach Gauß in der Mathematik behandelt worden. Trotzdem bilden Bezeichnungen wie „Gaußscher Prozeß" einen Hinweis darauf, daß seine Ideen Keime für die Entwicklung auch auf diesem Gebiet bildeten. Insbesondere gibt es bei stochastischen Prozessen etwa die Prädiktion nach kleinsten Quadraten, die Gauß' Minimumsprinzip bewußt aufgreift. In der Tat handelt es sich hier wiederum um Projektionen auf Unterräume und die Metrik ist wieder eine positiv-definite quadratische Form, freilich ist der zugrunde liegende Raum nunmehr ein Hilbertraum mit unendlich vielen Dimensionen. Die unerreichte Einfachheit und Eleganz des Gaußschen Minimumprinzips besteht ja gerade darin, daß es einfachsten geometrischen Operationen in linearen Räumen entspricht.

Auch das Beispiel der Kollokation zeigt wiederum deutlich, wie auf Gauß zurückgehende Ideen dazu dienen können, um über Gauß hinauszuwachsen.

Es gibt verschiedene Arten von Fortdauer und Weiterleben. Eine Art ist der Fortbestand einer kunstvollen Statue, eine andere das Weiterleben eines unscheinbaren Weizenkorns. Bei Gauß' Ideen gibt es beides. Abgeschlossene und vollendete Kunstwerke und scheinbar einfache Gedanken, keimhafte Anregungen, die aber in der Folgezeit wachsen und reiche Frucht bringen. Auf beide Arten lebt Gauß auch in unserer Wissenschaft weiter.